

大型望遠鏡“すばる”的主鏡鏡材最適配置設計

西口憲一* 三神 泉***
下山典子** 佐々木亜紀***
市川 晃* 家 正則†

1. まえがき

現在開発が進められている国立天文台向け大型光学赤外線望遠鏡“すばる”⁽¹⁾⁽²⁾は、世界最高の分解能(0.23秒角)を実現するため、主鏡の熱変形による分解能の劣化を0.02秒角以下に抑えることを目標にしている。“すばる”は、ハワイ島マウナケア山頂(海拔4,300m、平均気温0°C)へ設置されるため、主鏡製造時と天体観測時の温度差は最大で約20°Cに達する。上記目標を達成するためには、この温度変化による主鏡の熱変形をナノメータのオーダーにまで抑圧する必要がある。そのために、主鏡の鏡材には熱膨張係数(Coefficient of Thermal Expansion: CTE)の極めて小さな($10^{-8} \sim 10^{-9}$)ガラスを用い、さらに、生じた熱変形を補正するのに力制御を行う計画である。ところが、主鏡を構成する部分鏡材のCTEが均一でないことから主鏡の厚さ方向への熱変形が生じ、部分鏡材の配置をランダムに決めたのでは、力制御を加えても上記目標を達成するのが困難な見込みであった。

この困難を解決するために、部分鏡材の配置を組合せ最適化問題として定式化し、確率的な最適化手法であるシミュレーテッドアニーリング(Simulated Annealing、以下“SA”という)法を用いて最適配置(正確にいえば準最適配置)を求めた。得られた配置は熱変形を極めて小さく抑え、上記の目標を十分に満足するものである。この配置に基づいて、実際に部分鏡材が並べられ融着接合が行われた。

ここでは、このSA法による最適化の方法、及び得られた配置に対する熱変形量の誤差評価の方法について述べる。

2. 望遠鏡の主鏡鏡材の最適配置問題

2.1 主鏡鏡材の熱変形

“すばる”的主鏡は口径が8.3mあり、初めから1枚鏡とし

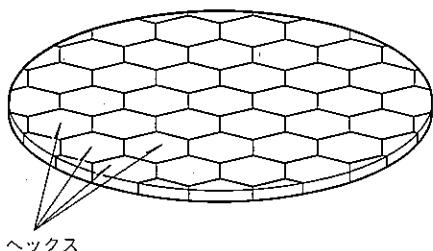


図1.“すばる”的主鏡鏡材

て製造するのが困難なことから、44枚のヘックスと呼ばれる6角形の部分鏡材を融着接合して作られる(図1)。もし、CTEがヘックスの内部で均一で、その値がすべてのヘックスで同一であれば、温度変化に伴って一様な膨張・収縮しか起こり得ず、分解能への影響はほとんどない。ところが実際のヘックスではその製法上、内部でのCTEは面内方向へは一定であるが厚さ方向(面外方向)にある傾きを持ち、バイメタル的な熱変形を引き起こす。正確にいえば、CTEの厚さ方向への変化は曲線的であるが、その平均的な傾きだけが熱変形に関係する。ヘックス内部でのCTEは図2に示すような二つのパラメータ α と β で特徴付けられる。 α はヘックス内部でのCTEの平均値であり、 β は厚さ方向へのCTEの平均的な傾き(最小2乗法で当てはめた直線の傾き)である。これら二つのパラメータ α と β のいずれもがばらつきを持っていて、ヘックスごとに異なる値をとる。そのため、主鏡全体での熱変形の大きさはヘックスの配置の仕方によって異なってくる。したがって、ヘックスを配置するときに、この熱変形ができる限り小さく抑えるような組合せをとる必要がある⁽³⁾⁽⁴⁾。

“すばる”的主鏡は、図3に示すように6角形に分割して番号を付けた。この位置番号は1から55まであるが、44枚のヘックスのうち3枚は2分割して、4枚は3分割して用いるためである。位置番号 k ($1 \leq k \leq K$, $K = 55$ は位置番号の総数)の位置にあるヘックスの α と β をそれぞれ α_k と β_k と置き、それらを要素とするベクトルを $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)^T$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)^T$ と定義する。このとき、主鏡の一様な温度変化に伴って生じる厚さ方向への変位

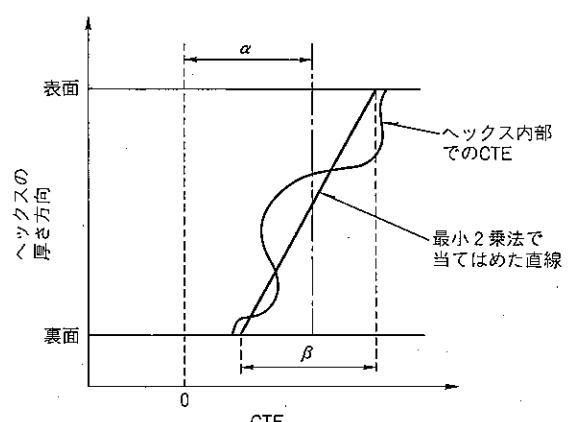


図2. 各ヘックスの平均CTE α とCTEの傾き β

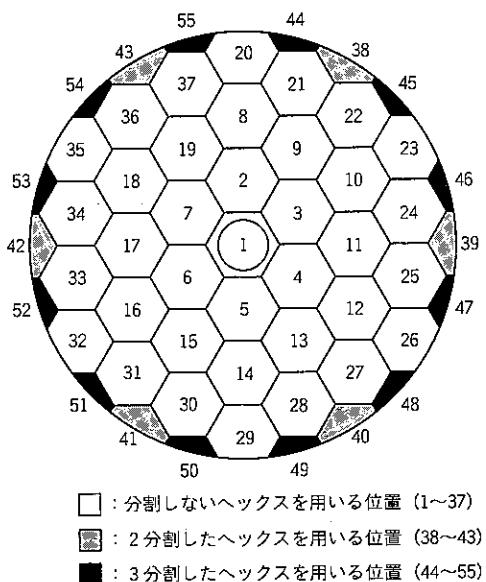


図3. 主鏡の6角形への分割とグループ分け

は、 1°C 当たり

$$u = U^\alpha \alpha + U^\beta \beta \quad \dots \quad (1)$$

と表せる。ここで、 $u = (u_1, u_2, \dots, u_N)^T$ は主鏡表面の N 個の点における熱変形量を表すベクトルである。“すばる”では264個のアクチュエータで力制御を行うことから、 u はアクチュエータ点での熱変形量で、 $N = 264$ としてある。また、

$$U^\alpha = \begin{pmatrix} U_{1,1}^\alpha & U_{1,2}^\alpha & \cdots & U_{1,K}^\alpha \\ U_{2,1}^\alpha & U_{2,2}^\alpha & \cdots & U_{2,K}^\alpha \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{N,1}^\alpha & U_{N,2}^\alpha & \cdots & U_{N,K}^\alpha \end{pmatrix} \quad \dots \quad (2)$$

$$U^\beta = \begin{pmatrix} U_{1,1}^\beta & U_{1,2}^\beta & \cdots & U_{1,K}^\beta \\ U_{2,1}^\beta & U_{2,2}^\beta & \cdots & U_{2,K}^\beta \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_{N,1}^\beta & U_{N,2}^\beta & \cdots & U_{N,K}^\beta \end{pmatrix} \quad \dots \quad (3)$$

は影響行列と呼ばれる行列で、各要素は以下のように定義される。

U_{ik}^α : k 番目の位置にあるヘックスのCTEが、ヘックス内部では一様に 1 ppb ($\text{ppb} : \text{parts per billion} = 10^9$ 分率)で、それ以外のヘックスのCTEは 0 ppb であると仮定して、主鏡の温度が 1°C 上昇したときに、 i 番目のアクチュエータ点に生じる変位

U_{ik}^β : k 番目の位置にあるヘックスのCTEが、ヘックスの上の面では 0.5 ppb 、下の面では -0.5 ppb で、それ以外のヘックスのCTEは 0 ppb であると仮定して、主鏡の温度が 1°C 上昇したときに、 i 番目のアクチュエータ点に生じる変位

影響行列 U^α , U^β は、有限要素法による熱解析で数値的

に求めることができる。

さらに、“すばる”的場合には、主鏡の熱変形や自重変形などを補正するために、能動的な力制御を行う⁽¹⁾⁽²⁾。これには、主鏡の変形をモード展開してその低次モードをアクチュエータで除去するという方式がとられる。上記の U^α , U^β の各行から低次モードを除去したものをそれぞれ U_{res}^α , U_{res}^β とすれば、式(1)の変位を力制御で補正した後の残留変位は

$$u = U_{\text{res}}^\alpha \alpha + U_{\text{res}}^\beta \beta \quad \dots \quad (4)$$

と表せる。

2.2 主鏡鏡材の最適配置問題

主鏡の熱変形に伴う分解能の劣化を最小に抑えるためには、式(4)の残留変位の2乗和を最小にしてやればよい。すなわち、

$$E = \|u\|^2 = \alpha^T F \alpha + 2 \alpha^T G \beta + \beta^T H \beta \quad \dots \quad (5)$$

が最適化問題の目的関数になる⁽³⁾⁽⁴⁾。ここで

$$F = (U_{\text{res}}^\alpha)^T U_{\text{res}}^\alpha, \quad G = (U_{\text{res}}^\alpha)^T U_{\text{res}}^\beta,$$

$$H = (U_{\text{res}}^\beta)^T U_{\text{res}}^\beta \quad \dots \quad (6)$$

と置いた。

主鏡鏡材の配置を変更することは、 K 次元ベクトル $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_K)^T$ と $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_K)^T$ の要素の並べ替えを行うことに相当する。ただし、並べ替えは α と β とで同じでなければならない。したがって、主鏡鏡材の最適配置問題を“ α と β の要素の並べ替えの中で、式(3)の E を最小にするものを見付けること”として定式化することができる。

この並べ替えの組合せの数は、もし K 個の位置のヘックスがすべて置き換える可能であるとすると $K!$ となる。“すばる”的場合には、 $K = 55$ であり、 $K! = 10^{73}$ となって、総当たり式に調べるのは不可能な組合せの数になる。実際には、ヘックスの置き換えには幾つかの制約がある、組合せの数は $K!$ よりも若干少なくなるが、すべての組合せを調べるのが不可能なことに変わりはない。

CTE のばらつきに起因する主鏡の熱変形は、平均で 20 nm 以下に抑えることを目標としている。これは、 20°C 当たりであるから 1°C 当たりでは 1 nm 以下であり、さらに鏡面全体の平均でこの値を達成するためにはアクチュエータ点での変形量は更にこの半分程度の 0.5 nm 以下に抑えなければならない。これは、変位の2乗和である E では、

$$E = 264 \times 0.5^2 = 66 \quad \dots \quad (7)$$

を目標値とすることに相当する。

2.3 配置をランダムに選んだ場合の熱変形

鏡材のCTEは非破壊での測定が可能であり、ガラスメーカーからヘックスごとのCTEデータが提供される。しかし、その時期はヘックスの一体融着の直前であるため、あらかじめ実際のCTEデータと同じ統計的性質を持つデータを作成し、そのデータを用いて様々な数値実験を行った。図4に想定したCTEのデータを示す。このデータに対して、ヘック

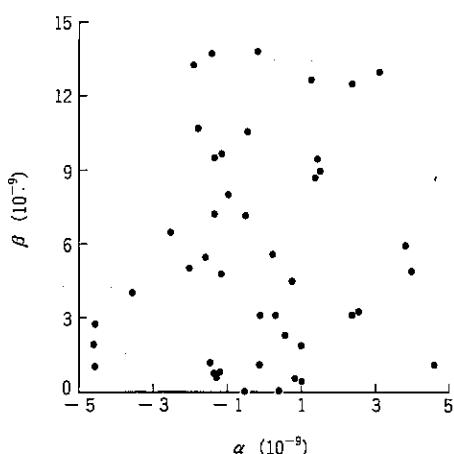


図4. 想定したCTEの分布

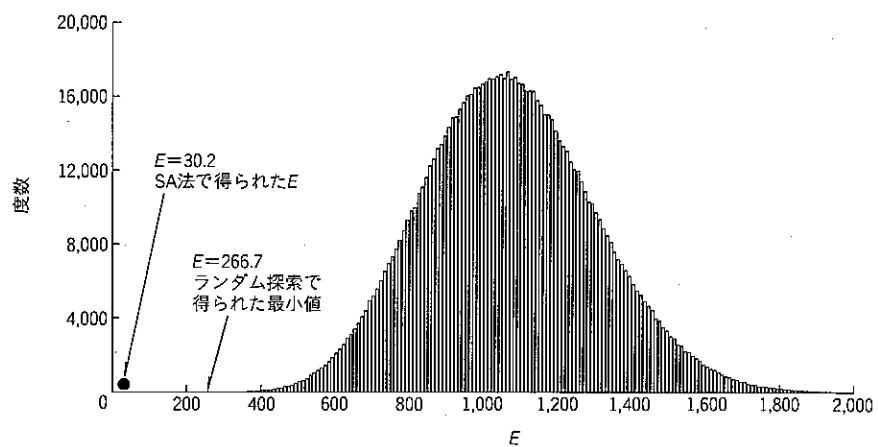


図5. ランダム探索によるEのヒストグラム

表1. 熱変形量の計算と誤差評価に用いた諸元

諸元	数值	備考
$\text{Tr}(F) = \sum_{k=1}^K F_{kk}$	2.30 nm^2	有限要素法による計算結果
$\text{Tr}(H) = \sum_{k=1}^K H_{kk}$	44.49 nm^2	有限要素法による計算結果
$\sum_{k,l=1}^K H_{kl}$	7.51 nm^2	有限要素法による計算結果
$\bar{\alpha}$: α の平均	0 ppb	設定値
$\bar{\beta}$: β の平均	5.57 ppb	設定値
$\text{Var}(\alpha)$: α の分散	4.56 ppb^2	設定値
$\text{Var}(\beta)$: β の分散	49.57 ppb^2	設定値
σ_α^2 : α の測定誤差の分散	$1/240 \text{ ppb}^2$	α の測定値が ppb の単位で量子化されたデータを 20 個平均して作られることによる。
σ_β^2 : β の測定誤差の分散	$1/240 \text{ ppb}^2$	β の測定値が ppb の単位で量子化されたデータを 20 個平均して作られることによる。
ϵ : 熱解析の相対誤差	0.03	設定値

スのあらゆる配置についての E の平均値は、

$$\langle E \rangle = \text{Tr}(F) \text{Var}(\alpha) + \text{Tr}(H) \text{Var}(\beta) \\ + \sum_{k,l=1}^K H_{kl} \cdot \bar{\beta}^2 = 1068.6 \quad \dots \dots \dots (8)$$

また、アクチュエータ点での変位の RMS (Root Mean Square) 値は、

$$\sqrt{\langle E \rangle / N} = \sqrt{1068.6 / 264} = 2.01 \text{ nm} \quad \dots \dots \dots (9)$$

となる (各数値は表1のものを用いた。)。これは、先の目標値からかなり懸け離れた大きな値である。

図5には、ヘックスの配置をランダムに決めた場合の E の分布を示す。この図は 10^6 通りの異なる配置をランダムに決め、各配置の E のヒストグラムをとったものである。このようなランダムな数多くの配置の中から、最も E の小さいものを選ぶという方法も考えられるが、この方法では限界がある。表2に示すのはランダムな配置の個数を変えていったときに E の最大値や最小値がどのように変化するかを調べたものであるが、配置の個数を 10 のベキで増やしていくても最小値の減少の仕方は緩やかであり、すぐに計算時間の限界に達してしまう。

3. SA法による最適配置

前節で定式化したような組合せ最適化問題に対して、近年、ニューラルネットワークを始めとして、SA法や遺伝アルゴリズム等、新しい概念に基づく最適化手法が盛んに研究されている^{(5)~(8)}。ここでは、このうちの確率的な最適化手法であるSA法を用いて主鏡鏡材配置の最適化を行った。

SA法は、目的関数が多数の極小値を持つ最適化問題において、温度という揺らぎを利用して大域的な最小値を求めるための確率的な探索法である⁽⁶⁾。この手法は、大規模な組合せ最適化問題を解くために1980年代の初期に提案され⁽⁷⁾、以後、巡回セールスマント問題を始めとする種々の組合せ最適化問題へ適用されている⁽⁶⁾。

SA法を前節の部分鏡材最適配置問題へ適用した場合のアルゴリズムは次のようになる。

- (1) 初期配置を任意に決め、 E の値を計算する。
- (2) $n = 1, 2, \dots, n_{\max}$ について (3) ~ (6) の処理を繰り返す。
- (3) アニーリングにおける温度 $T(n) = c / \log(1+n)$ を計算する。ただし、 c はあらかじめ設定した正の定数である。
- (4) $k = 1, 2, \dots, k_{\max}$, $l = k+1, k+2, \dots, k_{\max}$ について (5) 及び (6) の処理を繰り返す。
- (5) 位置番号 k と l の二つのヘックスを交換した場合の E の増分 ΔE を計算する。
- (6) 乱数を発生させて、確率

$$P = \frac{1}{1 + \exp\{\Delta E / T(n)\}}$$

で上記の二つのヘックスを交換する。交換が行われたときは、 $E + \Delta E$ を新たな E とする。

前節と同じ CTE データに対して SA 法を適用した場合の E の推移の例を図 6 に示す。この図のように E は、最初の $n = 2 \sim 3$ くらいまでに急激に減少し、あとゆっくりと揺らぎながら減少していくというのが、今回計算したすべての場合に共通の現象であった。図 7 に示すのは、 $n = 8,037$ で見いだされた $E = 30.2$ となる配置パターンである。この E の値は図 5 のヒストグラムの中にその位置を示してある。これから明らかかなように、SA 法を用いれば、ランダム探索で得られる最小値に比べてはるかに小さな値が得られる。

図 8 には、ランダムな配置と SA 法を用いて求めた E が小さい配置とのそれについて、三つずつのパターンを示してある。なお、ここではパターンを見やすくするために、 β だけを黒丸の面積として図示してある。このうちの小さい E の配置パターンから分かる特徴は、周辺部と中心のヘックスには大きな β が割り当てられているということと、隣り合ったもの同士は近い値をとるということである。前者は面積の小さいヘックスに大きな β を割り当てて全体としての熱変形を小さくしていると解釈できるし、また、後者は隣同士似た値の β を持ってきてバイメタル的な熱変形を打ち消していると解釈できる。したがって、 β だけを考えればこれらは合理的な配置になっていて、逆にこれらの特徴を持つように配置パターンを作ることも考えられる。しかしながら、そのような配置を作るアルゴリズムを見付けることは簡単ではないし、図には示さなかったが、さらに α のパターンの特徴まで考慮しなければならない。したがって、ここで示した SA 法はそのようなアルゴリズムを見いだすのが困難な最適配置問題に対して特に有効な方法である。

表 2. ランダム探索で得られた E の統計値

試行回数	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
最大値	1,689.8	1,923.4	1,934.2	2,116.2	2,307.0
平均値	1,084.6	1,061.9	1,068.9	1,070.3	1,069.9
最小値	445.6	445.6	343.45	302.0	266.7
標準偏差	244.3	231.8	232.9	230.5	230.4

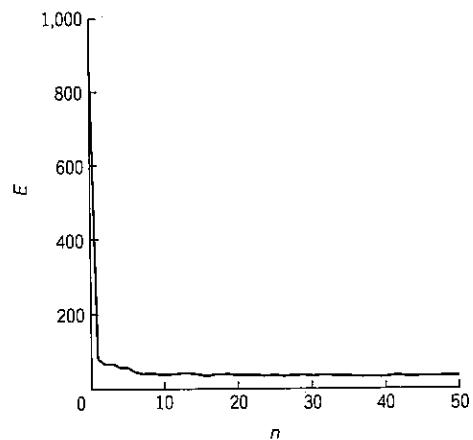


図 6. SA 法による E の推移

4. 誤差評価

最適化に用いられる評価関数は、CTE の測定誤差と、モデル化誤差や計算誤差などの有限要素法による熱解析の誤差を含む。誤差を含む評価関数に基づいて最適化を行った場合に得られる E は、ヘックスの配置をランダムに選んだ場合の平均的な E よりも大きな誤差を含むはずである。ここでは、そのような最適化で得られる E の誤差を評価する。

まず、最適化の結果得られる $E \equiv \|u\|^2$ の真値 $E_{\text{true}} \equiv \|u_{\text{true}}\|^2$ からの誤差 δE を、

$$\begin{aligned} \delta E &= E - E_{\text{true}} = \|u\|^2 - \|u_{\text{true}}\|^2 \\ &= 2(u, \delta u) - \|\delta u\|^2 \end{aligned} \quad \dots \quad (10)$$

と変形する。ここで、 $\delta u = u - u_{\text{true}}$ は熱変形量の誤差で

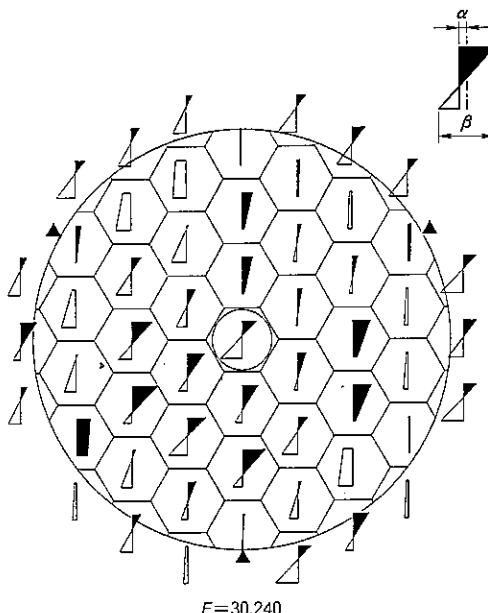
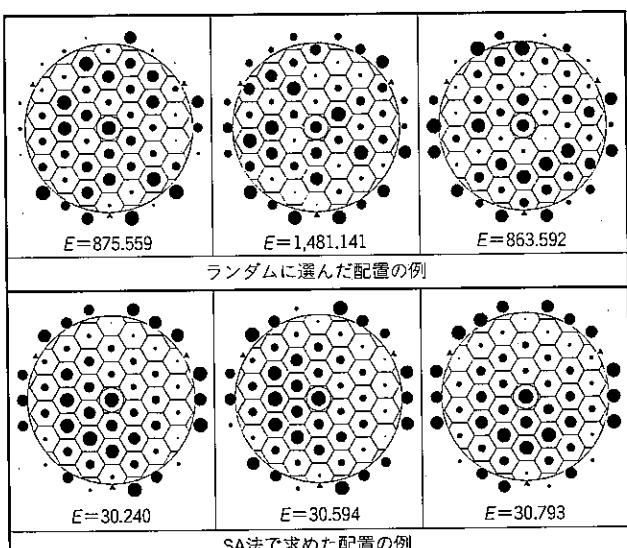


図 7. SA 法によって得られたヘックスの配置パターン



注 ●の面積が β の値を表す。

図 8. ヘックスの配置パターンの比較

ある。問題になるのは E が小さな値をとり、かつ E_{true} が大きな値をとるとき、すなわち誤差 δE が負の値をとる場合である。特に最適化の結果得られる E についてはこのような傾向が現れるはずである。そこで、

$$-\delta E = -2 \langle u, \delta u \rangle + \|\delta u\|^2 \quad \dots \dots \dots \quad (11)$$

の右辺第1項に Schwartz の不等式を適用して、

$$\begin{aligned} -\delta E &\leq 2 \|u\| \cdot \|\delta u\| + \|\delta u\|^2 \\ &= 2 \sqrt{E} \cdot \|\delta u\| + \|\delta u\|^2 \quad \dots \dots \dots \quad (12) \end{aligned}$$

とし、さらに $\|\delta u\|^2$ はその平均値 $\mu^2 \equiv \langle \|\delta u\|^2 \rangle$ で置き換えて、

$$-\delta E \leq 2 \sqrt{E} \cdot \mu + \mu^2 \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

で誤差を評価することにする。この評価はベクトル δu の向きに関して最悪値での評価になっている。

次に、 μ の値を評価するために熱変形量の誤差を、

$$\delta u = \delta u_1 + \delta u_2 \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

$$\delta u_1 = U_{\text{res}}^\alpha \delta \alpha + U_{\text{res}}^\beta \delta \beta \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

$$\delta u_2 = \delta U_{\text{res}}^\alpha \alpha + \delta U_{\text{res}}^\beta \beta \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

と分ける。ここで δu_1 は CTE の測定誤差 $\delta \alpha$ と $\delta \beta$ に基づく u の誤差、 δu_2 は有限要素法による熱解析の誤差に基づく u の誤差である。まず、CTE の測定誤差に関しては、 $\delta \alpha_k$ 、 $\delta \beta_k$, $k = 1, \dots, K$ はすべて統計的に独立であることを仮定し、

$$\langle \delta \alpha_k \rangle = \langle \delta \beta_k \rangle = 0 \quad \dots \dots \dots \quad (17)$$

$$\langle \delta \alpha_k^2 \rangle = \sigma_\alpha^2, \langle \delta \beta_k^2 \rangle = \sigma_\beta^2 \quad \dots \dots \dots \quad (18)$$

と置く、このとき、

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &\equiv \langle \|\delta u_1\|^2 \rangle \\ &= \text{Tr} \{ (U_{\text{res}}^\alpha)^T U_{\text{res}}^\alpha \langle \delta \alpha \delta \alpha^T \rangle \} \\ &\quad + \text{Tr} \{ (U_{\text{res}}^\beta)^T U_{\text{res}}^\beta \langle \delta \beta \delta \beta^T \rangle \} \\ &= \text{Tr}(F) \sigma_\alpha^2 + \text{Tr}(H) \sigma_\beta^2 \quad \dots \dots \dots \quad (19) \end{aligned}$$

となる。次に、熱解析の誤差については、

$$\mu_2^2 \equiv \langle \|\delta u_2\|^2 \rangle \sim \varepsilon^2 \langle \|u\|^2 \rangle = \varepsilon^2 \langle E \rangle \quad \dots \dots \dots \quad (20)$$

となることを仮定する。ここで ε は誤差の相対的大さきを表わすパラメータで、 $\langle \cdot \rangle$ はヘックスのあらゆる配置に関しての平均を表す。CTE の測定誤差と熱解析の誤差とは独立だから $\mu^2 = \mu_1^2 + \mu_2^2$ とすることができる。

以上の解析と、表1に示した数値から E の誤差が評価でき、

$$-\delta E \leq 12.9 \quad \dots \dots \dots \quad (21)$$

となる。この右辺の値は最適化で得られた E の値 30.2 に対して無視できるほど小さいものではないが、この誤差を付け加えても E の値は十分目標を満足するものになっている。

5. む す び

SA 法を用いて望遠鏡“すばる”的主鏡鏡材の最適配置を

行った結果、熱変形量は配置をランダムに決めた場合に比べて著しく小さく抑えられ、種々の誤差要因を考慮しても目標性能であったナノメートルのオーダーまで抑えられることが分かった。現在“すばる”的主鏡はこのようにして決められた配置に従って一体融着が行われ、次の製造過程に移行したところである。

最後に、この最適配置の設計に当たり、御支援・御協力いただいた関係各位に深く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- (1) 家 正則, 唐牛 宏, 小林行泰: 動きだした 8m すばる望遠鏡計画, 応用物理, 62, No. 6, 540~551 (1993)
- (2) 安藤裕康, 伊藤 昇: 宇宙の光を探る一大型光学赤外線望遠鏡「すばる」に取り入れられる技術-, 日本機械学会誌, 95, No.889, 1073~1076 (1993)
- (3) 三神 泉, 伊藤 昇, 遠田治正, 佐々木亜紀, 山下泰正, 安藤裕康, 家 正則: JNLT 主鏡の熱変形解析, 日本天文学会1990年春季年会, B114 (1990)
- (4) Mikami, I., Sasaki, A., Itoh, N., Asari, K., Nishiguchi, K., Iye, M.: Hexes Pattern Optimization Method in ULE Primary Mirror Blank, Proceeding of ESO Conference on Progress in Telescope and Instrumentation Technologies, Garching, 67~70 (1992)
- (5) ミニ特集: 最適化法の新展開, 計測と制御, 29, No.12 (1990)
- (6) Aarts, E., Korst, J.: Simulated Annealing and Boltzmann Machines, John Wiley & Sons (1989)
- (7) Kirkpatrick, S., Gelatt Jr, C. D., Vecchi, M. T.: Optimization by Simulated Annealing, Science, No. 220, 671~681 (1983)
- (8) 西口憲一, 市川 晃, 三神 泉, 佐々木亜紀: 構造物の熱変形最小化を目的とした組合せ最適化問題への Gibbs サンプラーの応用, Preprints of 23rd ISCIE Symposium on Stochastic Systems Theory and Its Applications, Osaka, 91~96 (1991)
- (9) Sasaki, A., Mikami, I., Shimoyama, N., Nishiguchi, K., Powell, W. R., Edwards, M. J., Ando, H.: Primary mirror blank fabrication of SUBARU Telescope, SPIE Conference on Advanced Technology Optical Telescope V, Hawaii, (SPIE Proceedings 2199) (1994-3)